Basel, comp

Zur Anwendung der elliptischen Funktionen

auf das

Poncelet'sche Schliessungsproblem.

INAUGURAL-DISSERTATION

zur Erlangung der philosophischen Doktorwürde

vorgelegt der Hohen philosophischen Fakultät der Universität Basel

von

ARTHUR STUTZ

aus

WINTERTHUR.

BASEL

Buchdruckerei Emil Birkhäuser

1909.

Genehmigt von der mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung der philosophischen Fakultät auf Antrag der Herren Professoren Dr. *R. Fueter* und *K. Vonder Mühll.*

Basel, den 28. Juni 1909.

Prof. A. Hagenbach,
Dekan.

Zur Anwendung der elliptischen Funktionen auf das Poncelet'sche Schliessungsproblem.

Vorliegende Arbeit setzt es sich zum Ziel, das Poncelet'sche Schliessungsproblem, soweit es auf die Theorie der elliptischen Funktionen Bezug nimmt, umfassend darzustellen.

Die Aufdeckung des Problems in seinen Beziehungen zu den elliptischen Funktionen verdankt man, wie bekannt ist, Jakobi (Journal für Mathematik, Bd. 3: «Über die Anwendung der elliptischen Transcendenten auf ein Problem der Elementargeometrie»). Das Problem an sich steht im Mittelpunkt der geometrischen Darlegungen Poncelet's (Traité des propriétés projectives des figures, Tome I/IV). Im Sinne Jakobi's hat sich später besonders Richelot mit ihm abgegeben (J. f. Math., Bde. 5 u. 38: «Über die Anwendung einiger Formeln aus der Theorie der elliptischen Funktionen auf ein bekanntes Problem der Geometrie»).

Es gab sodann zu manchen funktionentheoretischen Betrachtungen Anlass[1]), welche jedoch zum grössten Teil über die Bestrebungen dieser Arbeit hinausgehen.

---

[1]) J. Rosanes und M. Pasch, J. f. Math., Bd. 64, S. 126.

M. Simon, J. f. Math., Bd. 81, S. 301.

J. Gundelfinger, J. f. Math., Bd. 83, S. 171.

H. Leauté, Comptes rendues de l'académie des sciences, Tome 79, S. 93 u. 602.

Halphen, Traité des fonctions elliptiques et leurs applications, Tome II, chap. X.

Die einzelnen Abschnitte enthalten folgendes:

Abschnitt I gibt eine kurze Definition der elliptischen Transcendenten, dazu ein einfaches Beispiel ihrer Gegenwart in geometrischen Gebilden.

Abschnitt II behandelt die von Jakobi aufgedeckte Anwendung und endigt mit dem Schliessungssatz für Kreise.

Abschnitt III gibt die Entwicklung des allgemeinen Poncelet'schen Satzes auf Grund des Begriffs der zweideutigen Verwandtschaft. Nebenher ein paar neue Schliessungsprobleme und zum Schluss der bekannte Satz vom 2 m-Eck.

Abschnitt IV beschäftigt sich mit den Bedingungsgleichungen für die Existenz von Poncelet'schen Polygonen. Der Fall zweier beliebiger Kegelschnitte wird auf den Fall zweier Kreise zurückgeführt.

Abschnitt V bringt schliesslich einige Sätze, welche metrische Eigenschaften betreffen.

Neuere Literatur findet sich im Text angegeben.

I. Einleitung.

1. Ein *Schliessungsproblem* kennzeichnet sich durch folgenden Grundgedanken: Irgendwo im Raum sei ein Punkt z gegeben. Nach gewisser Vorschrift, die jede Mehrdeutigkeit ausschliesst, rücke man aus z fort und gelange zu einem zweiten Punkt z_1, von z_1 nach derselben Vorschrift zu einem dritten Punkt z_2, u. s. f. Im Allgemeinen wird man stets zu neuen Punkten kommen; und es besteht keine Möglichkeit, irgend einmal wieder mit dem Anfangspunkt z zusammen zu treffen. Ausnahmsweise kann dieser Fall eintreten: Dann haben wir ein Schliessungsproblem, d. h. wir werden veranlasst, die Bedingungen zu untersuchen, unter welchen jenes Faktum eingetreten ist.

2. Die *elliptischen Funktionen* $sn\,u$ und $cn\,u$, die wir gebrauchen werden, sind die trigonometrischen Funktionen Sinus und Cosinus einer Variabeln φ, diese als Funktion einer Veränderlichen u gedacht; in der Bezeichnung:

$$1) \qquad \varphi = am\,u\,,$$

deren eindeutige Definition durch die Differentialgleichung

$$2) \qquad \frac{d\,am\,u}{du} = dn\,u$$

— wo $dn\,u = \sqrt{1 - k^2 sn^2 u}$, darin k^2 irgend eine Zahl — und die Nebenbedingung

$$3) \qquad [am\,u]_{u=o} = 0$$

gegeben wird.

Durch Umstellung der Differentialgleichung und Einführung der Variabeln φ in $dn\,u$ folgt

$$du = \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$$

und somit die Darstellung von u als Funktion von φ

$$4) \qquad u = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} ,$$

oder, indem wir $\sin \varphi = x$ zur Integrationsvariabeln erheben,

$$u = \int_0^{x} \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}} ,$$

typisch durch das Polynom 4. Grades unter dem Wurzelzeichen.

Die Zahl k, Modul geheissen, hat wesentliche Bedeutung; jede Operation im Gebiete der elliptischen Funktionen setzt einen bestimmt vorgegebenen Wert k voraus.

Es erübrigt noch, die Relationen

$$5) \qquad \begin{aligned} cn^2 u + sn^2 u &= 1 \\ dn^2 u + k^2 sn^2 u &= 1 \end{aligned}$$

und das *Additionstheorem*

$$6) \qquad cn(u_1 - u) = cn\, u_1\, cn\, u + sn\, u_1\, sn\, u\, dn\, (u_1 - u)$$

beizufügen.

3. Die *geometrische Anwendung* stützt sich für gewöhnlich auf folgenden Gedankengang: Bei der Betrachtung eines geometrischen Gebildes sei man auf eine Gleichung von der Form

$$7) \qquad A \cos \varphi_1 \cos \varphi + B \sin \varphi_1 \sin \varphi = C$$

gestossen, worin φ und φ_1 die Bedeutung von Variabeln, A, B und C die Bedeutung von Constanten haben. Es sei $A > B$ und $> C$. Alsdann kann man setzen

$$8) \qquad \begin{aligned} \frac{C}{A} &= \cos \alpha \\ \frac{B}{A} &= \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha} . \end{aligned}$$

Damit ist in erster Linie ein Winkel α definiert, nämlich derjenige Winkel φ_1, der dem Winkel $\varphi = o$ entspricht; ausserdem wird der Ausdruck

$$9) \qquad \frac{1 - \left(\frac{B}{A}\right)^2}{1 - \left(\frac{C}{A}\right)^2} = k^2 = const.$$

als bestimmt vorgegebene Grösse eingeführt.

Nun wird durch die Gleichung 1) jedem Winkel φ ein Argument u zugeordnet; wir schreiben

$$\varphi = am\, u \qquad \varphi_1 = am\, u_1$$
$$\alpha = am\, a$$

und erhalten an Stelle von 7) die Gleichung

$$cn\, a = cn\, u_1\, cn\, u + sn\, u_1\, sn\, u\, dn\, a$$

Der Vergleich mit 6) setzt uns in den Stand, folgendes Resultat auszusprechen:

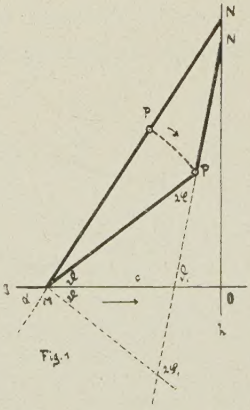
Den Wertepaaren φ und φ_1 unseres geometrischen Gebildes ordnen sich eindeutig Paare von Argumenten u und u_1 zu, deren Differenz

$$u_1 - u = a$$

constant ist.

Man kann nachträglich die Elemente A, B, C variieren. Dass diese Variation aber nicht willkürlich geschehen darf, sondern einer gewissen Gesetzmässigkeit zu unterliegen hat, lehrt die Gleichung 9).

4. Zunächst bringe ich folgendes einfache *Beispiel* vor: Gegeben seien zwei aufeinander senkrechte Gerade g und h und eine Strecke $MN = d$, deren Endpunkt M in g und N in h liegen soll. Ein Punkt P auf der Strecke MN teile dieselbe im Verhältnis λ. Er soll uns die Spitze eines gestreckten Winkels mit den Schenkeln PM und PN darstellen (s. Fig. 1).



Indem wir M festhalten (also $MO = c$ constant annehmen) und N der Geraden h entlang gleiten lassen, beschreibt P einen Kreis. Dabei interessieren uns vor allem die aufeinanderfolgenden Paare von Winkeln ϑ und ϑ_1, welche die Schenkel PM und PN mit der durch den Pfeil angezeigten Richtung der Geraden g einschliessen. Wir bemerken, dass dieselben die Gleichung

$$\frac{1}{1+\lambda} \cos \vartheta + \frac{\lambda}{1+\lambda} \cos \vartheta_1 = \frac{c}{d}$$

erfüllen. Hier führen wir ein

$$\vartheta = \varphi_1 - \varphi \qquad \vartheta_1 = \varphi_1 + \varphi$$

und erhalten für die Winkelpaare φ und φ_1 die Gleichung

$$\cos \varphi_1 \cos \varphi + \frac{1-\lambda}{1+\lambda} \sin \varphi_1 \sin \varphi = \frac{c}{d} .$$

Setzen wir dann gemäss 8)

$$\frac{c}{d} = \cos \alpha$$

$$\frac{1-\lambda}{1+\lambda} = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}$$

so kommen wir zum Resultat:

Den Winkelpaaren φ und φ_1 der Figur 1 ordnen sich eindeutig Paare von Argumenten u und u_1 zu, deren Differenz $u_1 - u = a$ constant ist, wenn mit $\boldsymbol{a}$ das dem Winkel α zugehörige Argument bezeichnet wird. In Zeichen

$$\varphi = am\, u$$

$$\varphi_1 = am\,(u + a) .$$

II. Der Poncelet'sche Satz für Kreise.

5. Im Bd. 3 des Journals für Math. hat *Jakobi* mit einer solchen Anwendung der elliptischen Transcendenten überrascht.

Gegeben seien zwei Kreise, von denen der eine mit dem Halbmesser 1 und dem Mittelpunkt C den andern mit dem Halbmesser r und dem Mittelpunkt c umschliessen möge. Der Abstand der Mittelpunkte heisse h. Aus irgend einem Punkte F des Kreises C ziehe man eine Tangente an den innern Kreis, welche die ersten wieder in F_1 schneidet. Insbesondere ziehe man die Tangente $A A_1$, wo A denjenigen Schnittpunkt des Durchmessers $c\,C$ mit dem Kreis C bezeichnet, der in Bezug auf C entgegengesetzt zu c liegt.

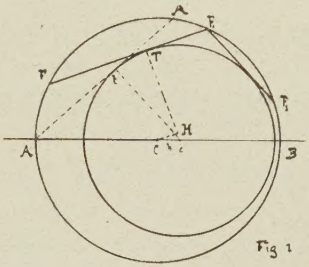


Fig 1

Jetzt nenne man die Winkel

$$F\,C\,A = 2\varphi \qquad F_1\,C\,A = 2\varphi_1$$
$$A_1\,C\,A = 2\alpha$$

und fälle noch die Lote $c\,T$ auf $F F_1$, $C H$ auf $c\,T$, so folgt aus der Figur

$$c\,T = T H + H c$$

d. i.

$$r = \cos(\varphi_1 - \varphi) + h\cos(\varphi_1 + \varphi),$$

oder

$$\frac{r}{1+h} = \cos\varphi_1 \cos\varphi + \frac{1-h}{1+h}\sin\varphi_1 \sin\varphi.$$

Nach vollzogener Substitution

10)
$$\frac{r}{1+h} = \cos\alpha$$

$$\frac{1-h}{1+h} = \sqrt{1 - k^2 \sin^2\alpha}$$

ergibt sich sofort: *Den Winkelpaaren* φ_1 *und* φ *unserer Figur entsprechen Paare von Argumenten* u_1 *und* u, *deren Differenz*

$$u_1 - u = a$$

constant ist. Oder: *Dem Punkt* F *gehört das Argument* u, *dem Punkt* F_1 *das Argument* $u + a$ *zu.* Von welchem Punkte F man auch ausgehe, stets vermehrt sich dabei das dem Punkt F zugehörige Argument u um die constante Grösse a. Rückt man vom Punkte F_1 zum Gegenpunkt F_2, von F_2 zum Punkt F_3, ... vor, so fügt sich jedesmal zum Argument u die Grösse a hinzu; dergestalt, dass allgemein dem Punkt F_n das Argument $u + na$ entspricht.

Die Relation

$$\frac{1 - \left(\frac{1-h}{1+h}\right)^2}{\sin^2 \alpha} = k^2 = const.$$

wird mit Hilfe von 10) in eine Relation zwischen den Elementen r und h übergeführt und lautet jetzt:

$$11) \qquad \frac{4h}{(1+h)^2 - r^2} = k^2 = const.$$

für spätere Zwecke berechnen wir auch noch

$$1 - k^2 = \frac{(1-h)^2 - r^2}{(1+h)^2 - r^2} = \frac{1 - \left(\frac{r}{1-h}\right)^2}{1 - \left(\frac{r}{1+h}\right)^2} \cdot \frac{\left(\frac{r}{1+h}\right)^2}{\left(\frac{r}{1-h}\right)^2}$$

6. Das *System von Kreisen* (r, h), welche alle dasselbe k^2 ergeben, ist durch den Besitz einer gemeinsamen Potenzlinie ausgezeichnet.

Die Potenzlinie der beiden Kreise *1* und r ist eine Gerade, welche auf der Verbindungslinie $c\,C$ senkrecht steht. Ihr Fusspunkt sei Q (Fig. 3). Können wir nachweisen, dass die Strecke $A\,Q$ (oder $C\,Q$ und $B\,Q$) nur von der Grösse k^2 abhängt, so ist unsere Behauptung bewiesen.

Es seien s und S die Berührungspunkte der Tangenten aus Q an die Kreise r und *1*. Q ist definiert durch

$$s\,Q = S\,Q$$

daher

$$\overline{c\,Q}^2 \quad r^2 = \overline{C\,Q}^2 - 1$$

oder

$$\left(\overline{A\,Q} - (1+h)\right)^2 - r^2 = \left(\overline{A\,Q}^2 - 1\right)^2 - 1$$

also

$$A\,Q = \frac{(1+h)^2 - r^2}{2h} = \frac{2}{k^2} = const.$$

w. z. b. w.

Nach Annahme eines bestimmten k kommen somit für eine Addition im Sinne der Figur 2 nur solche Kreise in Betracht, welche diesem durch k definierten Kreissysteme angehören.

Besondere Eigenschaften desselben sind: Jeder kleinere Kreis wird von jedem grösseren völlig umschlossen; der Kreis C mit dem Radius 1 und ein Punkt O, der Nullkreis des Systems sind Grenzfälle. Es entsprechen ihnen die Wertepaare.

12)
$$r = 1 \qquad h = 0$$
$$r = 0 \qquad h = \frac{1 - \sqrt{1 - k^2}}{1 + \sqrt{1 - k^2}}$$

Dieser ausgezeichnete Punkt O rückt dem Mittelpunkt C des äussersten Kreises um so näher, je kleiner k ist und bedingt, im Punkte C angelangt, ein System concentrischer Kreise. Ist $k^2 = 1$, so liegt der Punkt O in der Peripherie des Aussenkreises und die Kreise des zugehörigen Systems berühren sich alle in O.

Es lässt sich eine fruchtbare Eigenschaft desselben ableiten. Man bezeichne mit t den Berührungspunkt der Tangenten $A\,A_1$ mit dem Innenkreie (α, k), während T als Berührungspunkt der Tangente $F\,F_1$ mit demselben Kreis bereits eingeführt ist. Dann kommt aus der Figur:

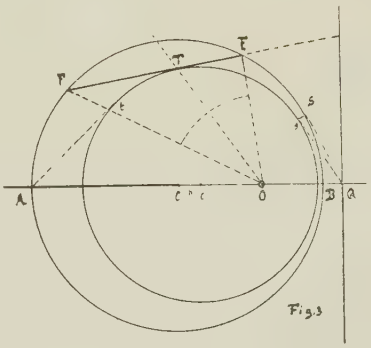


Fig. 3

$$\overline{FT} = \overline{At}.\, dn\, u\ ,$$

im Besondern

$$\overline{FO} = \overline{AO}\, dn\, u\ ,$$

also

$$\frac{\overline{FT}}{\overline{FO}} = const.\ ,$$

sofern man den Innenkreis $(a,\ k)$ als fest annimmt. Für den Gegenpunkt F_1 ist in gleicher Weise

$$\frac{\overline{F_1T}}{\overline{F_1O}} = const.$$

Die Gleichsetzung ergibt

$$\frac{\overline{FT}}{\overline{F_1T}} = \frac{\overline{FO}}{\overline{F_1O}};$$

daher geht die Halbierende des Winkels F_1OF durch den Berührungspunkt F hindurch (Construktion des Innenkreises zu gegebener Sehne).

7. Zum Argument u eines beliebigen Punktes F fügt sich stets das Argument a hinzu, wenn man, den innern Kreis $(a,\ k)$ tangierend, von F nach dem Gegenpunkt F_1 fortschreitet. Nun sei aus dem vorgeschriebenen Kreissysteme (k) ein zweiter Kreis entnommen, dem die Sehne AB' angehöre (wobei B' der Schnittpunkt der Tangente aus A an den neuen Kreis mit dem Aussenkreis). Den Winkel $B'CA$ bezeichne man mit 2β und das β zugehörige Argument mit b.

Zieht man jetzt eine Sehne FF_1, die den neuen Kreis $(\beta,\ k)$ tangiert, so entsprechen den Punkten F und F_1 Argumente u und u_1, deren Differenz ebenfalls constant, nun aber gleich b ist. Das Argument u erfährt somit den Zuwachs b, wenn man vom Punkte F aus in Bezug auf den neuen Kreis $(\beta,\ k)$ zum Gegenpunkt F_1 fortschreitet.

Nun seien noch weitere Kreise $(\gamma,\ k)$, $(\delta,\ k)$, . . . des vorgeschriebenen Kreissystems (k) gegeben, wobei den Winkeln γ, δ, . . . die Argumente c, d, . . . entsprechen sollen. Indem man, von einem beliebigen Punkte F ausgehend, zum Gegenpunkt F_1 in Bezug auf den Kreis $(\delta,\ k)$, von F_1 zum Gegen-

punkt F_2 in Bezug auf den Kreis (β, k), von F_2 zum Gegenpunkt F_3 in Bezug auf den Kreis (γ, k), . . . fortschreitet, haben sich nacheinander zu dem ursprünglichen Argument u die *Argumente* $a, b, c, \ldots$ hinzu addiert; dergestalt, dass allgemein dem Punkt F_λ das Argument

$$u + a + b + c + \ldots + l$$

entspricht.

Schon hieraus ist ersichtlich, dass, in welcher Ordnung auch die Kreise (α, k), (β, k), . . . zur Verwendung kommen, der Endpunkt F_λ stets der nämliche sein wird.

8. *Wie lautet nun die Bedingung dafür, dass dieser Endpunkt F_λ irgend einmal mit dem Anfangspunkt F zusammenfällt und ein geschlossenes, beliebig vielfach gewundenes Polygon zu Stande kommt?* Betrachtet man die für die Funktion $2\,am\,u$ gültige Gleichung

$$2\,am\,(u + 2nK) = 2\,am\,u + n \cdot 2\pi\,,$$

$$\left(\frac{\pi}{2} = am\,K\right)$$

der man die folgende

$$2\,am\,u + 2\pi = 2\,am\,(u + 2K)$$

entnimmt, so erhellt sofort, dass sich bei einmaligem Umlauf das Argument u des Punktes F um die Grösse $2K$, bei m maligem Umlauf um die Grösse $m \cdot 2K$ vermehrt. Die Bedingung, dass der Punkt F_ν mit dem beliebig gewählten Anfangspunkt F zusammenfalle, lautet demnach

$$13) \qquad u + a + b + \ldots l = u + m \cdot 2K\,.$$

Indem man gewahr wird, dass sich zu beiden Seiten dieser Bedingungsgleichung die variable Grösse u weghebt, die Bedingung also von der Wahl des Anfangspunktes F absolut nicht abhängt, ist mit einem Schlage folgender *Satz* bewiesen:

Aus einer Schaar von Kreisen, welche alle dieselbe Potenzlinie haben, sei eine Anzahl derart ausgewählt, dass es gelingt, von einem gewissen Punkt F der Peripherie des äussersten

Kreises ausgehend, ein Polygon von der Seitenzahl n zum Schluss zu bringen, dessen Ecken in der Peripherie des äussersten Kreises liegen und dessen Seiten Tangenten an die Innenkreise sind, so ist jeder Punkt der Peripherie des äussersten Kreises Ausgangspunkt eines solchen Polygons von n Seiten.

Noch deutlicher: Gelingt es für einen gegebenen Punkt F_0 *nicht*, ein solches Polygon von n Seiten zum Schluss zu bringen, so gelingt es *überhaupt nicht.*

9. Es gilt nun sofort den *Spezialfall* zu erörtern, wo alle Argumente $a, b, c, \ldots$ mit einem einzigen, z. B. a identisch sind. Die Bedingung 13) vereinfacht sich zu

$$14) \qquad na = m \cdot 2K \ .$$

Hieraus bestimmt sich eindeutig ein Kreis (α, k) derart, dass ihm ein m fach gewundenes Polygon von der Seitenzahl n umgeschrieben werden kann, dessen Ecken in der Peripherie des gegebenen Kreises C liegen. Die Bestimmungsstücke r und h jenes Innenkreises (α, k) sind [10)]

$$15) \qquad h = \frac{1 - dn\, a}{1 + dn\, a} \ ,$$

$$r = \frac{2\, cn\, a}{1 + dn\, a} \ ,$$

worin für a der Wert aus 14) zu setzen ist.

Da man zwei Kegelschnitte, sofern sie nicht 4 Punkte gemein haben, stets collinear in ein Kreispaar überführen kann, so gilt der Schliessungssatz für zwei Kreise in gleicher Weise für zwei Kegelschnitte, welchen ein Polygon um- und eingeschrieben ist. Wir wissen aber seit Poncelet[1]) und werden später nachweisen, dass diese Verallgemeinerung auf Kegelschnitte noch viel ausgiebiger statt hat.

10. Während nun die allgemeine Bedingungsgleichung 13) unendlich viele Lösungen enthält, indem man von den λ Argumenten $a, b, c, \ldots . l$ stets $(\lambda - 1)$ erste beliebig annehmen

[1]) Traité des propriétés projectives des figures I/S. 347/56.

kann und hierauf das Argument l eindeutig vorgeschrieben ist, enthält die Bedingungsgleichung 14) bei vorgegebenem Zahlenpaar (m, n) von Anfang an einen ganz bestimmten Wert für a, d. h. stets eine und nur eine Lösung des in Sonderheit betrachteten Problems.

Wurde nun umgekehrt ein Innenkreis (a, k) beliebig angenommen, so hat man ein geschlossenes Polygon nur für den Fall, dass das Verhältnis

$$\frac{a}{2K}$$

ein rationaler, echter Bruch ist, der zum Überfluss noch $\leq \frac{1}{2}$ vorausgesetzt werden kann, da sich alle möglichen Kreise (a, k) am Intervall

$$0 < a \leq K$$

erschöpfen. Wäre dieser Bruch irrational, so könnten keine zwei ganze Zahlen m und n von der Art gefunden werden dass eine Gleichung von der Form

$$na = m \cdot 2K$$

erfüllt wäre.

Nun interessiert noch zu wissen, wie viele solcher Polygone zu einem gegebenen n möglich sind, wenn die Zahl m der Windungen freigegeben wird. Solcher sind offenbar halb so viele, als es zu n teilerfremde Zahlen $< n$ gibt, also [wenn man die hierfür gebräuchliche Bezeichnung $\varphi(n)$ benützt]

$$\tfrac{1}{2}\varphi(n) ;$$

denn alle möglichen Kreise erschöpfen sich, wie eben bemerkt, am Intervall $0 < a \leq K$, und für den Fall, dass die Zahlen m und n einen gemeinsamen Faktor haben, reduziert sich das Polygon in Tat und Wahrheit auf ein solches von niederer Seitenzahl.

Zum Schlusse sei bemerkt, dass wir mit Jakobi die Annahme gemacht haben, es liege der Kreis (r) ganz innerhalb des Kreises (l). Dieser Annahme liegt jedoch kein Zwang zu Grunde; wir können die beiden Kreise beliebig annehmen,

nur wird verlangt, dass man vom Kreis *(l)* Tangenten an den Kreis *(r)* legen könne; d. h. die Bedingung $r < 1 + h$ soll bestehen bleiben.

11. Unter der Voraussetzung, dass der Schliessungssatz für ein Kegelschnittpaar bewiesen sei, beweist Ph. Maennchen einige *neue Schliessungsprobleme*[1]). Davon ein hübsches Beispiel:

Auf der Kugel werden zwei Kreise K_1 und K_2 angenommen, die keinen gemeinsamen Punkt haben sollen. Nun wird dem Kreis K_1 ein Polygon eingeschrieben, dessen Seiten den Kreis K_2 berühren; die Seiten des Polygons seien Kugelkreise, deren Ebenen alle durch einen und denselben beliebig gewählten Punkt P hindurch gehen sollen.

Dann gilt der Schliessungssatz: Dass sich das Kreisbogenpolygon, in irgend einem Punkt des Kreises K_1 begonnen, stets dann schliesst, wenn sich ein solches für einen gegebenen Punkt geschlossen hat.

Zum Beweise projiziert man die ganze Figur von P aus auf die Ebene von K_1; K_1 ist alsdann seine eigene Projektion, die von K_2 ist ein Kegelschnitt und die des Kreisbogenpolygons ist ein geradliniges Polygon, das K_1 eingeschrieben und der Projektion von K_2 umgeschrieben ist. Da aber für das geradlinige Polygon der Schliessungssatz gilt, gilt er auch für unser Kreisbogenpolygon.

Der spezielle Fall, dass der Punkt P mit dem Mittelpunkt der Kugel zusammenfällt, d. h. die Polygonseiten Grosskreise sind, ist der von Richelot[2]) eingehend behandelte.

---

[1]) Archiv für Math. und Physik, Bde. 4 und 7 (1903 u. 1904): Neue Schliessungsprobleme.

[2]) In Bd. 5 des Journals für Math.

III. Der allgemeine Poncelet'sche Satz.

12. Zur Aufstellung des allgemeinen Poncelet'schen Satzes benützen wir den Begriff der *zwei-zweideutigen symmetrischen Verwandtschaft*. Dieser Begriff ist für unsere Schliessungsprobleme von grundlegender Bedeutung; noch mehr, das Wesen derselben *beruht* auf diesem Begriff.

Es sei

$$\ldots\ldots \lambda_{-2}, \lambda_{-1}, \lambda_0, \lambda_{+1}, \lambda_{+2} \ldots\ldots$$

das Bruchstück einer Reihe aufeinander folgender Werte eines Parameters λ, deren jeder aus dem vorhergehenden durch den Prozess A eindeutig gewonnen worden ist. Den Vorgang möge nebenstehende Figur versinnlichen.

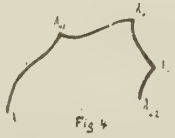


Fig 1

Nun erhebe ich die Bedingung, dass unsere Reihe in umgekehrter Folge

$$\ldots\ldots \lambda_{+2}, \lambda_{+1}, \lambda_0, \lambda_{-1}, \lambda_{-2} \ldots\ldots$$

durch fortgesetzte Anwendung eines Prozesses B gewonnen werde, der mit dem Prozess A von derselben Art, dem Sinne nach zu diesem entgegengesetzt sei.

Trifft diese Bedingung zu, so gibt es eine [im allgemeinsten Falle] doppelperiodische Funktion

$$\lambda = \chi(u)$$

und ein Argument a von der Art, dass die Differenz zweier aufeinanderfolgender Werte des Argumentes u (welche den aufeinanderfolgenden Werten des Parameters λ angehören) gleich a, d. h. constant ist. Es entspricht dann dem Prozess A eine Addition, dem Prozess B eine Subtraktion des Argumentes a, zwei Prozesse, die einander in der Tat entgegengesetzt gleich sind.

13. Um den Begriff der zwei-zweideutigen symmetrischen Verwandtschaft mit Worten zu berühren, beziehe ich mich auf die, dem Poncelet'schen Satz zu Grunde liegende Figur zweier *Kegelschnitte*, in die ein (vorläufig offenes) Polygon eingezeichnet ist.

Es seien F und F_1 zwei benachbarte Eckpunkte desselben; einem jeden derselben entsprechen zwei Nachbarecken, von denen die eine F_1, resp. F ist. Die Verwandtschaft der Punkte F und F_1 kommt zum Ausdruck in einer Relation zwischen den zugehörigen Parametern, die wir mit λ und μ bezeichnen wollen. Diese Relation ist doppelt-quadratisch und in λ und μ symmetrisch; denn nur dann entsprechen einem gewissen Wert von λ zwei Werte von μ und jedem dieser Werte von μ zwei Werte, deren einer λ ist. Sie erscheint also in der Form:

$$0 = F = a_0\lambda^2\mu^2 + 2a_1\lambda\mu(\lambda+\mu) + b(\lambda^2+\mu^2) + 4c\lambda\mu + a_3(\lambda+\mu) + a_4$$

Hieran knüpft sich der Ausdruck der zwei-zweideutigen symmetrischen Verwandtschaft.

Denkt man sich nun F das eine Mal nach λ, das andere Mal nach μ geordnet, so kommt

$$o = F = A\mu^2 + 2B\mu + C = A'\lambda^2 + 2B'\lambda + C'$$

Dabei sind A, B, C Polygone vom vierten Grad in Bezug auf λ, A', B', C' dieselben Polygone in Bezug auf μ.

Wir bilden zunächst

$$\tfrac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial \mu} = A\mu + B = \pm\sqrt{B^2 - AC}$$

$$\tfrac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial \lambda} = A\lambda + B = +1\sqrt{B'^2 - A'C'}$$

Diese Ausdrücke sind in die Gleichung für das totale Differential von F

$$dF = \frac{\delta F}{\delta \mu}d\mu + \frac{\delta F}{\delta \lambda}d\lambda = 0$$

einzufügen.

Sofern wir nun die Integrale

$$16) \qquad \int_0^{\lambda} \frac{d\lambda}{\sqrt{B^2 - AC}} = u \qquad \int_0^{\mu} \frac{d\mu}{\sqrt{B'^2 - A'C'}} = u_1$$

setzten, folgt als Lösung der Differenzialgleichung

$$u_1 - u = const.^{1})$$

Die Umkehrung ergibt

$$17) \qquad \lambda = \chi(u) \qquad \mu = \chi(u + a)$$

wo $\chi(u)$ eine doppeltperiodische Funktion, u das variable Argument derselben und a die oben willkürlich belassene Constante bezeichnet. Die Grösse a ist genau definiert als derjenige Wert von u_1, der dem Wert $u = 0$ entspricht.

Damit wird unsere zu Anfang des Abschnittes gemachte Überlegung als richtig erkannt: Zwei benachbarten Punkten F und F_1 entsprechen Argumente u und u_1, deren Differenz constant ist. Geht man zu neuen Punkten F_2, F_3, . . . F_n vor, so nimmt das Argument u um n mal die Grösse a zu.

Wird irgend einmal $na = w$, wo w eine Periode der Funktion $\chi(u)$, so lehrt die Gleichung

$$\chi(u + na) = \chi(u + w) = \chi(u),$$

dass in diesem Fall der Punkt F_n mit dem Punkt F zusammenfällt, das im Punkte F begonnene Polygon sich also schliesst; und zwar schliesst es sich, da die Bedingung $na = w$ von u nicht abhängt, *immer*, welchen Punkt F als Anfangspunkt man auch wähle.

14. *Neue Schliessungsprobleme* bringen, wie bereits erwähnt, die Arbeiten von Ph. Maennchen. Obschon jene von sehr viel komplizierterer Natur sind, tragen sie doch den Stempel von etwas Selbstverständlichem an sich. Denn es genügt in jedem Falle, die zwei-zweideutige Verwandtschaft aufzudecken, um die Gültigkeit des Schliessungssatzes sogleich einzusehen.

---

1) S. etwa Halphen, Traité II, chap. IX.

P. Kokott befasst sich mit einer gewissen Gattung sternförmiger Polygone.[1]) Zu Grunde gelegt sind zwei Kreise R und r; der grössere (R) möge den kleineren (r) ganz umschliessen. Von der Peripherie des kleineren mache man einen Schritt gleich a nach dem grösseren, von da aus zurück zum kleineren den gleichen Schritt u. s. w. Es entsteht eine sternförmige Figur, die sich schliessen kann; es gilt der Satz: wenn sie sich schliesst, schliesst sie sich immer. Als grosse Vereinfachung erweist sich die Annahme $a = r$.

Besonderes Interesse verdient das folgende Beispiel. Gegeben seien wiederum zwei Kreise R und r; der Kreis r möge wie vorhin ganz innerhalb (R) liegen. In das von beiden begrenzte Flächenstück zeichne ich beliebig einen Kreis ein, der die gegebenen berührt, den kleinen Kreis r aber nicht enthalten soll. Nun lässt sich beidseitig ein neuer Kreis angliedern, der den vorigen und die gegebenen berührt u. s. f.

Nach den Überlegungen in 11. und 12. steht fest: Schliesst sich die Kreiskette *in einem Fall*, so schliesst sie sich *immer*, welches auch der Ausgangskreis sei.

Mit dem Begriff der zwei-zweideutigen symmetrischen Verwandtschaft allein operiert Karl Rohn in seiner Arbeit[2]): Das Poncelet'sche Schliessungsproblem und eine gewisse Erweiterung. Der allgemeine Poncelet'sche Satz wird vollständig ausgesprochen. Bemerkenswert sind die Bedingungsgleichungen für die Existenz eines geschlossenen Polygons, welches zwei Kegelschnitten um- und eingeschrieben ist.

15. Zum Beweis der Sätze, die *Poncelet* allgemein über Schaaren von Kegelschnitten ausspricht, bedarf es jetzt für uns nur noch eines kleinen Schrittes.

Es genügt, die Diskriminanten $B^2 - AC$ und $B'^2 - A'C'$ (13), die sich nur in der Variabeln unterscheiden, auf ihre Nullstellen zu untersuchen. Offenbar entsprechen diesen vier Nullstellen die vier (reellen, imag. oder teilweise reellen und imag.) Schnittpunkte der beiden gegebenen Kegelschnitte $f = 0$

[1]) Archiv für Math. und Physik. Bd. 13 (3) 1908.

[2]) Leipziger Berichte, Bd. 60, 1908.

und $\varphi = o$; dann entspricht nämlich einem Wert von λ nur ein Wert von μ und umgekehrt. Da sich nun aber der Modul k der Integrale 16) ganz ausschliesslich aus diesen Nullstellen zusammensetzt, so bleibt er derselbe für alle Kegelschnitte der Schaar

$$f + \lambda\varphi = 0 ,$$

und die Addition von Argumenten $a, b, c, \ldots$, wie man sie in Bezug auf ein System zusammengehöriger Kreise kennen gelernt hat, vollführt sich auch in Bezug auf alle möglichen Kegelschnitte der Schaar $f + \lambda\varphi$. Man wähle also einige davon aus und beginne, von einem beliebigen Punkt des einen derselben ausgehend, ein Polygon zu beschreiben, so wird sich dasselbe schliessen, wenn die Summe der Argumente, welche bei der Addition zur Verwendung kamen, einer Periode gleich ist. Legt man dieser Bedingung den Sinn bei, dass von n Argumenten $(n - 1)$ beliebig, das $n$te bestimmt ist, so erhellt sofort die Richtigkeit des *allgemeinen Poncelet'schen Satzes:*

«Wenn sich $(n-1)$ Seiten eines dem f eingeschriebenen Polygons auf φ wälzen, so wälzt sich auch die $n$te auf einen bestimmten Kegelschnitt der Schaar» und *«wenn sich $(n-1)$ Seiten auf Kegelschnitten der Schaar $f + \lambda\varphi$ wälzen, so auch die $n$te.»*[1])

16. Auch die *Diagonalen* des geschlossenen Polygons umhüllen Kegelschnitte der Schaar.

Hieran schliesst sich eine schöne *Folgerung.* Denken wir uns ein Polygon von gerader Seitenzahl, welches zwei Kegelschnitten um- und eingeschrieben ist, und dazu eine Diagonale, welche zwei gegenüberliegende Punkte verbinden soll. Diese Diagonale umhüllt, wenn das Polygon gedreht wird, einen Kegelschnitt der Schaar. Es seien F und F^* die beiden Punkte, u und u^* die zugehörigen Argumente und a ihre Differenz.

Nun gilt die Gleichung

$$\chi(u + a + a) = \chi(u) ,$$

---

[1]) s. M. Simon, J. f. Math. Band 81. S. 301.

womit der einmalige Umlauf angedeutet ist. Der Kegelschnitt, welcher dabei umgangen wurde, ist ein Punkt. Die Constanz von a will aber heissen, dass die Diagonale FF^* für jeden Wert von u *denselben* Kegelschnitt berühre; also folgt: der Kegelschnitt, welcher die Diagonale FF^* bei der Drehung des Polygons umhüllt, ist ein Punkt, das Nullelement der Schaar.

Schliesslich ergibt sich der *Satz:*

«*Die Verbindungsgeraden gegenüberliegender Ecken eines Polygons von gerader Seitenzahl, welches zwei Kegelschnitten um- und eingeschrieben ist, gehen durch einen und denselben Punkt.*»

Das ist die erste Hälfte eines Poncelet'schen Satzes, dessen zweite Hälfte lautet:

«*Die Schnittpunkte gegenüberliegender Seiten des Polygons liegen auf einer Geraden.*»

Das folgt aus dem Vorigen, wenn man bedenkt, dass die Berührungspunkte des Polygons mit dem Kegelschnitt φ ein neues Poncelet'sches Polygon bestimmen, dessen Seiten den Schnittpunkten des zweiten Teiles als Polare zugeordnet sind.

IV. Relationen.

17. Es wurde die Bedingung formuliert, unter welcher ein geschlossenes Polygon von n Seiten zustande kommt. Erfordernis ist aber, diese Bedingung durch die Elemente des geometrischen Gebildes selbst auszudrücken, das heisst mit andern Worten, den Elementen eine Beziehung unter einander vorzuschreiben, welcher genügt sein muss, damit der Schliessungsfall eintrete.

Dieses Problem ist alt; es haben schon Steiner und Fuss, ein Schüler Eulers, solche Relationen für zwei Kreise angegeben, zu denen sie auf geometrischem Wege gelangt sind.

Von Fuss ist bekannt, dass er aus Unkenntnis des Schliessungssatzes sehr viel Mühe darauf verwandte, seine Relationen für das 3- bis 8-Eck, die er an den symmetrisch-unregelmässigen Polygonen (die vom Punkt A der Fig. 2 ausgehen) abgeleitet hatte, auf beliebig gelegene Polygone zu erweitern. Unser Schliessungssatz sagt eben aus, dass die Existenz jener besondern Polygone die Existenz aller übrigen in sich schliesst und die Relation also ganz allgemeine Bedeutung hat.

Zunächst der Fall zweier Kreise; später ergeben sich die Relationen für ein Kegelschnittpaar auf gleiche Weise.

18. Die in Frage stehende Relation gehört in das Gebiet der *Multiplikation und Teilung der elliptischen Funktionen.*

Die Bedingung für das (einfach gewundene) n-Eck lautet

$$na = 2K.$$

Hieraus folgert man

$$18) \qquad sn(na) = 0$$

Mit a sind aber noch andere Argumente in diese Gleichung einbezogen, nämlich alle Argumente a^* von der Art

$$na^* = 2K + \mu \cdot 2K + \mu' \cdot 2iK',$$

wo μ und μ' je ein Restsystem nach n durchlaufen sollen. Also sind darin alle beliebig vielfach gewundenen n-Ecke enthalten.

Nun hat man sich die Formeln 15) zu vergegenwärtigen:

$$r = \frac{2\,cn\,a^*}{1 + dn\,a^*}, \qquad h = \frac{1 - dn\,a^*}{1 + dn\,a^*},$$

welche bei gegebenem k jedem Wert des Argumentes ein ganz bestimmtes Wertepaar (r, h) zuordnen.

Umgekehrt gilt [10) und 11)]

$$19) \qquad cn\,a = \frac{r}{1+h} = p \qquad \frac{cn\,a}{dn\,a} = \frac{r}{1-h} = q$$

$$1 - k^2 = \frac{1 - q^2}{1 - p^2} \cdot \frac{p^2}{q^2}.$$

Nun lassen sich, wie bekannt ist, $sn(nv)$, $cn(nv)$ und $dn(nv)$ rational und ganz durch die Funktionswerte $sn\,v$, $cn\,v$, $dn\,v$ ausdrücken; und zwar in folgender Weise: es ist

bei geradem n

$$sn(nv) = snv \cdot cnv \cdot dnv \frac{A(sn^2v, k^2)}{D(sn^2v, k^2)}$$

$$cn(nv) = \frac{B(sn^2v, k^2)}{D(sn^2v, k^2)}$$

$$dn(nv) = \frac{C(sn^2v, k^2)}{D(sn^2, k^2)}$$

bei ungeradem n

$$sn(nv) = snv \frac{A(sn^2v, k^2)}{D(sn^2v, k^2)}$$

$$cn(nv) = cnv \frac{B(sn^2v, k^2)}{D(sn^2v, k^2)}$$

$$dn(nv) = dnv \frac{C(sn^2v, k^2)}{D(sn^2v, k^2)}$$

Darin sind A, B, C, D ganze rationale Funktionen und ihre Zahlkoëffizienten ganze rationale Zahlen. Ihre Abhängigkeit erhellt aus den Gleichungen

$$1 = cn^2(nv) + sn^2(nv) = dn^2(nv) + k^2 sn^2(nv)$$

und aus den Rekursionsformeln [1]).

Unsere Bedingung für das n-Eck tritt also zu Tage in der Gleichung

$$sna\ cna\ dna \frac{A_n}{D_n} = 0\,, \qquad \text{wenn } n \text{ gerade.}$$

20)

$$sna \frac{A_n}{D_n} = 0\,, \qquad \text{wenn } n \text{ ungerade.}$$

Diese Gleichung, aufgefasst als eine Beziehung zwischen den Grössen p und q, also r und h ist die gesuchte Relation in ihrer allgemeinsten Fassung. Der Nenner D_n musste beibehalten werden, weil die Funktionen A_n, B_n, C_n und D_n in Bezug auf die Grössen p und q nicht mehr ganz sind.

Man bemerkt folgende spezielle Fälle: für beide n ist $a = 0$ eine Lösung; dem entspricht $h = 0$, $r = 1$: der Kreis r fällt mit dem Kreis 1 zusammen. Das geometrische Äquivalent ist ein Punkt auf der Peripherie des Kreises 1, die Seiten des Polygons die n fach in sich zurückkehrend gedachte Tangente in diesem Punkt.

Im Besondern ist für ein gerades n $a = K$ eine Lösung; dem entspricht $r = 0$, h mit k beliebig. Die Art des zugehörigen Polygons ist offensichtlich.

---

[1]) s. etwa Weber, Alg. III. Bd. 1908. Abschnitt Mult. u. Teilg. der ellipt. F.

Für ein gerades n ergibt der Faktor $dn\,a$, gleich null gesetzt, eine Lösung. Diese ist $h = 1$, während r mit k willkürlich bleibt. Dem Fall $n = 1$ entspricht eine Originalfigur, die andern Fälle $n = 2m$ sind Combinationen davon [1]).

Unsere Bedingungsgleichung $\frac{A_n}{D_n} = 0$ ist als Ganzes betrachtet, in Bezug auf p und q symmetrisch; denn es wird an den Verhältnissen nichts geändert, wenn ich h mit $-h$ vertausche; sie zerfällt in mehrere irreduzible Faktoren, darunter mindestens einer wieder in Bezug auf p und q symmetrisch ist; dieser Faktor ist, gleich Null gesetzt, diejenige Relation, auf die *Richelot* im Bd. 38 des Crelle'schen Journals sein ganzes Augenmerk richtet, während er die andern Faktoren als überflüssig bezeichnet.

Richelot geht von einer speziellen Teilungsgleichung aus und entwickelt ein Verfahren zur Auffindung des fraglichen Faktors; naturgemäss kommt er nicht über die einfachsten Fälle hinaus.

19. Um rasch einige Resultate zu gewinnen, gehen wir folgenden Weg, der darin besteht, dass wir von der Lagrange'schen Gleichung ausgiebigen Gebrauch machen.

Es sind je zwei benachbarte Punkte A_ν und $A_{\nu+1}$ unseres in Bezug auf die Centrale cC symmetrischen n-Ecks mit einander verbunden durch eine Gleichung von der Form

$$cn\,a = cn(\nu a)\,cn(\nu+1)\,a + sn(\nu a)\,sn(\nu+1)\,a\,dn\,a\,.$$

Zur Kenntnis des Polygons genügen aber die Punkte

$$A \text{ bis } A_{\frac{n}{2}} \qquad \text{wenn } n \text{ gerade}$$

$$A \text{ bis } A_{\frac{n+1}{2}} \qquad \text{wenn } n \text{ ungerade.}$$

Das gibt $\frac{n}{2} - 1$ resp. $\frac{n-1}{2}$

solcher Gleichungen, aus welchen wir die Argumente

$$2a\,,\ 3a\,,\ \ldots\ .\ \frac{n}{2}a \quad \text{resp.} \quad \frac{n+1}{2}a$$

[1]) Auf diese möglicherweise noch nicht bemerkte Lösung macht mich Prof. O. Spiess aufmerksam.

zu eliminieren trachten; das wird ermöglicht durch die Bedingung

$$21)\quad \begin{aligned} &\frac{n}{2}a = K \qquad \left(A_{\frac{n}{2}} \equiv B\right) \\ &\frac{n+1}{2}a = 2K - \frac{n-1}{2}a \qquad \left(A_{\frac{n+1}{2}} \text{ liegt } A_{\frac{n-1}{2}} \text{ gegenüber}\right) \end{aligned}$$

Wir verwenden also das Gleichungssystem

$$22)\quad \begin{aligned} &\frac{cn\,a\;cn\,2a}{p} + \frac{sn\,a\;sn\,2a}{q} = 1 \\ &\frac{cn\,2a\;cn\,3a}{p} + \frac{sn\,2a\;sn\,3a}{q} = 1 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

welches schliesst mit dem Argumente

$$\frac{n}{2}a = K \quad \text{resp.} \quad \frac{n+1}{2}a = 2K - \frac{n-1}{2}a,$$

also mit der Gleichung

$$\frac{sn\left(\frac{n}{2}-1\right)a}{q} = 1 \quad \text{resp.} \quad \frac{-cn^2\frac{n-1}{2}a}{p} + \frac{sn^2\frac{n-1}{2}a}{q} = 1.$$

Die auf rationale Form gebrachte *Eliminationsgleichung* ist die gesuchte Relation, welche, wie aus der Anlage des Gleichungssystems hervorgeht, sowohl die Existenz des einfach-gewundenen, wie aller möglichen vielfach-gewundenen n-Ecke anzeigt.

20. Suchen wir nach der *Bedingung*, dass

a) Zwei Kreisen ein *Dreieck* um- und eingeschrieben werden kann.

Wir haben

$$3a = 2K$$

$$2a = 2K - a \qquad \begin{aligned} cn\,2a &= -cn\,a \\ sn\,2a &= sn\,a. \end{aligned}$$

Es genügt somit die Gleichung

$$\frac{-cn\,a \cdot cn\,a}{p} + \frac{sn\,a\;sn\,a}{q} = 1$$

oder $$-p + \frac{1-p^2}{q} = 1$$

Man bekommt daher (wenn man den Faktor $1+p$, der auf den trivialen Fall $a = 2K$ hinzielt, unterdrückt)

$$p + q \quad 1 = 0$$

oder $$\frac{r}{1+h} + \frac{r}{1-h} = 1,$$

als Relation für das Dreieck (deren erste Erwähnung man Euler zuschreibt).

Schreibt man sie in der Form

$$1 - h = 2\frac{r}{1+h} = 2\cos\alpha,$$

so ist ihre geometrische Bedeutung ohne weiteres ersichtlich (Fig. 5).

b) Für das *Viereck* ist

$$1a = 2K$$

$$2a = K \quad \begin{matrix} cn\,2a - 0 \\ sn\,2a - 1 \end{matrix}$$

Unser Gleichungssystem reduziert sich also auf die eine Gleichung

$$\frac{sn\,a}{q} - 1$$

Quadriert man und bedenkt $sn^2a + cn^2a = 1$, so kommt

$$p^2 + q^2 \quad 1 \cdot 0,$$

oder, man erhält als Relation für das Viereck

$$\left(\frac{r}{1+h}\right)^2 + \left(\frac{r}{1-h}\right)^2 = 1$$

Die Form $\frac{sn\,a}{q} = 1$, oder [nach 19) und 10)]

$$cotg\,\alpha = \frac{1-h}{1+h}$$

lässt sich insofern geometrisch verwerten, als man zu gegebenem h den zugehörigen Winkel α und damit r bestimmen kann (Fig. 6).

c) Die Relation für das *Fünfeck* ergibt sich leicht, indem man die Grösse $\frac{cn^2\,2a}{sn^2\,2a}$ aus den beiden Gleichungen

$$\frac{cn\,a\;cn\,2a}{p} + \frac{sn\,a\;sn\,2a}{q} = 1$$

$$\frac{cn^2\,2a}{p} + \frac{sn^2\,2a}{q} = 1$$

berechnet. Die beiden erhaltenen Ausdrücke setze man einander gleich; dann kommt

$$(p^2 + q^2 - 1)^2 - 4pq(1-p)(1-q) = 0$$

als Gleichung für das Fünfeck.

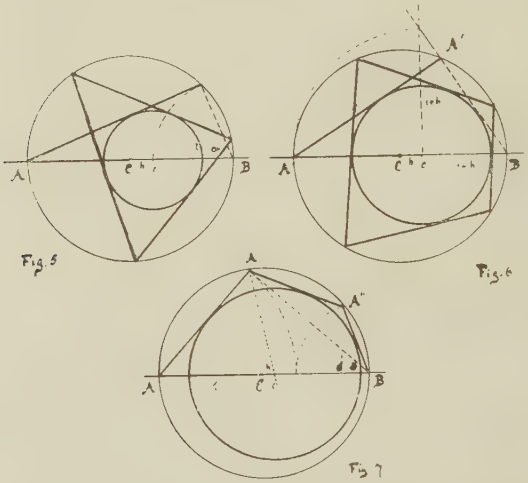


Fig. 5 Fig. 6 Fig. 7

d) Das *Sechseck* gestattet eine elegante Rechnung. Man hat

$$6a = 2K$$

$$2a = K - a \qquad sn\,2a = sn(K-a) = q$$

In die Gleichung

$$\frac{cn\,a\;cn\,2a}{p} + \frac{sn\,a\;sn\,2a}{q} = 1$$

eingesetzt, gibt

$$cn\,2a + sn\,a = 1$$

Durch zweimaliges Quadrieren erhält man dann sogleich

$$(p^2 + q^2 - 1)^2 \quad 4(1 \quad p^2)(1 \quad q^2) = 0$$

als Relation für das Sechseck.

Die Form

$$cn\,2a + sn\,a = 1$$

kommt in Figur 7 zur Geltung. Ist nämlich eine Sehne AA' (d. h. ein Winkel $\alpha = am\,a$) beliebig gegeben, so findet man mittels

$$2\,cn\,2a = 2 - 2\,sn\,a$$

die benachbarte Sehne $A'A''$ und damit den gesuchten Innenkreis.

Das *7-Eck* betreffend verweise ich auf 22.

21. Es bleibt zu bemerken, dass nur diejenigen unserer Relationen ursprüngliche sind, für welche die Seitenzahl eine Primzahl ist, indem man alle andern mit Hilfe von Substitutionen aus jenen ableitet.

Wir zerlegen die Seitenzahl n des Polygons in ihre Primfaktoren

$$n = \lambda \cdot \mu \cdot \nu \ldots$$

und nehmen an, es sei die Relation für das $\frac{n}{\lambda}$-Eck nicht aber diejenigen für das n-Eck gefunden. Jetzt stellen wir gegenüber die Argumente

$$a = \frac{2K}{\frac{n}{\lambda}} \quad \text{und} \quad a^* = \frac{2K}{n},$$

welche den beiden Polygonen angehören. Es ist

$$a = \lambda \cdot a^*$$

Nun wurde

$$cn\,a = p \qquad \frac{cn\,a}{dn\,a} = q$$

gesetzt; jetzt setze man auch noch

$$cn\,a^* = p^* \qquad \frac{cn\,a^*}{dn\,a^*} = q^*$$

Wir behaupten:

Ist die Relation für das $\frac{n}{\lambda}$-Eck

$$R_{\frac{n}{\lambda}}(p, q) = 0$$

gegeben, so wird durch eine Substitution

$$p = S_\lambda^I (p^*, q^*)$$

$$q = S_\lambda^{II} (p^*, q^*),$$

wo S^I und S^{II} rationale Funktionen, der Übergang zu der Relation für das n-Eck

$$R_n (p^*, q^*) = 0$$

bewerkstelligt.

Es ist

$$p = cn\, a = cn\, (\lambda a^*)$$

$$q = \frac{cn\, a}{dn\, a} = \frac{cn\, (\lambda a^*)}{dn\, (\lambda a^*)}$$

und da sich $cn\, \lambda a^*$ und $dn(\lambda a^*)$ rational durch p^* und q^* (22) ausdrücken lassen, vollführt sich der Übergang wirklich in der angegebenen Weise.

Nennen wir die Gesamtsubstitution kurzweg S_λ und bezeichnen den Vorgang in der Form

$$R_n = R_{\underset{\lambda}{n}} S_\lambda ,$$

so gelangen wir, nachdem mit $R_{\underset{\lambda}{n}}$ dieselbe Betrachtung angestellt ist, zu folgender *Darstellung der Relation* R_n:

$$R_n = R_{\underset{\lambda \cdot \mu \cdot r \ldots}{n}} \cdot S_\lambda S_\mu S_r \ldots$$

Ich berechne die Substitutionen S_2 und S_3, d. h. die Formeln für die Verzweifachung und Verdreifachung:

$$S_2 \left\{ \begin{array}{ll} p \ldots\ldots & \dfrac{p^2 + q^2 - 1}{q^2 - p^2 + 1} \\ q \ldots\ldots & \dfrac{p^2 + q^2 - 1}{p^2 - q^2 + 1} \end{array} \right.$$

$$S_3 \left\{ \begin{array}{ll} p \ldots\ldots p & \dfrac{(p^2 + q^2 - 1)^2 - 4(1 - p^2)(1 - q^2)}{(p^2 + q^2 - 1)^2 + 4p^2(1 - p^2)} \\ q \ldots\ldots q & \dfrac{(p^2 + q^2 - 1)^2 - 4(1 - p^2)(1 - q^2)}{(p^2 + q^2 - 1)^2 + 4q^2(1 - q^2)} \end{array} \right.$$

Eine gewisse Probe dieser Ausdrücke besteht darin, dass die Summe und das Produkt derselben wieder in Bezug auf p und q symmetrische Funktionen sein müssen.

Beispiele:

Die Relation für das *Achteck:*

$$((p^2-q^2)^2-1)^2-2(p^2+q^2-1)^2\left((p^2-q^2)^2+1\right)=0$$

für das *Neuneck:*

$$p\frac{(p^2+q^2-1)^2-4(1-p^2)(1-q^2)}{(p^2+q^2-1)^2+4p^2(1-p^2)}+q\frac{(p^2+q^2-1)^2-4(1-p^2)(1-q^2)}{(p^2+q^2-1)^2+4q^2(1-q^2)}=1$$

22. Da unsere Relationen $R(p,q)=0$ symmetrisch und rational in p und q sind, lassen sie sich nach einem Satz der Algebra rational durch die symmetrischen Grundfunktionen ausdrücken.

Diese sind

$$p+q=t \qquad p\cdot q=s,$$

sodass sich p und q als Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$z^2-tz+s=0$$

ergeben. Durch diese Substitutionen können wir unsere Relation $R(p,q)=0$ in eine Relation

$$R^*(t,s)=0$$

zwischen t und s überführen. Diese letztere ist in Bezug auf s von niedrigerem Grade als in Bezug auf t. Ist sie in Bezug auf s vom ersten oder zweiten Grade, so folgt die *Möglichkeit der Konstruktion* des zugehörigen Poncelet'schen Polygons; denn ich kann $t=t_0$ beliebig annehmen und hierauf s aus einer linearen oder quadratischen Gleichung bestimmen; dasselbe gilt darauf für die Grössen r und h.

Behandelt man auf diese Weise die Relation für das Siebeneck:

$$(1-(p+q)^2)(1-(p^2-q^2)^2)-2(p+q)(1-(p-q)^2)(1-p^2-q^2)=0$$

so erhält man eine in s quadratische Gleichung; und es folgt: *das Poncelet'sche 7-Eck ist konstruierbar.*

23. Es wurde angekündigt, dass die Relation für ein Kegelschnittpaar auf gleiche Weise zu erreichen sei. Ich halte mich dabei an die Ausführungen in 12. und 13. und gehe von dem Gedanken aus, dass es möglich ist, die zwei-zweideutige symmetrische Verwandtschaft, welche durch zwei Kegelschnitte festgelegt ist, eindeutig auf eine solche zweier Kreise zu beziehen. Ist diese von der Art, dass ein geschlossenes Polygon zustande kommt, so folgt dies auch für das Kegelschnittpaar.

Ich denke mir die beiden Kegelschnitte, F und φ, auf ihr gemeinsames Polardreieck bezogen; ihre Gleichungen mögen sein

$$F = x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

$$\varphi = \frac{u^2}{\alpha} + \frac{v^2}{\beta} + \frac{w^2}{\gamma} = 0$$

An Stelle von F trete die gebräuchliche Parameterdarstellung

$$x = \lambda^2 - 1 \qquad y = i(\lambda^2 + 1) \qquad z = 2\lambda$$

Zwei Punkten F und F_1 des Kegelschnittes sollen die Parameter λ und μ entsprechen. Die Koordinaten der Verbindungsgeraden FF_1 berechnen sich hierauf zu

$$u = \lambda\mu - 1 \qquad v = i(\lambda\mu + 1) \qquad w = \lambda + \mu$$

Nun soll die Sehne FF_1 Tangente an dem Kegelschnitt φ sein; dazu müssen die Koordinaten u, v, w die Gleichung des Kegelschnittes φ erfüllen. Es folgt die zwei-zweideutige-symmetrische Verwandtschaft

23) $$\lambda^2\mu^2 - \sigma(\lambda^2 + \mu^2) + 2\tau\lambda\mu + 1 = 0,$$

wobei die Ausdrücke

24) $$\frac{\alpha\beta}{\gamma(\alpha - \beta)} = \sigma \qquad \frac{\gamma(\alpha + \beta) - \alpha\beta}{\gamma(\alpha - \beta)} = \tau$$

gesetzt wurden.

Die Gleichung 23) multiplizieren wir beidseitig mit einer noch näher zu bestimmenden Zahlgrösse ϱ^4, und setzen zugleich

$$\lambda\varrho = \eta \qquad \mu\varrho = \eta_1 ;$$

dann kommt

25) $$\eta^2\eta_1^2 - \sigma\varrho^2(\eta^2 + \eta_1^2) + 2\tau\varrho^2\eta\eta_1 + \varrho^4 = 0$$

Um den Schliessungssatz für ein Kreispaar zu entwickeln, diente uns von Anfang an die Gleichung

$$cn\,u_1\,cn\,u + dn\,a\,sn\,u_1\,sn\,u = cn\,a\ ,$$

worin $a = u_1 - u = const.$ Wir setzten dann in der Folge $cn\,a = p$, $\frac{cn\,a}{dn\,a} = q$; und die Existenz eines geschlossenen Polygons kam zum Ausdruck in einer Relation zwischen den Grössen p und q. Indem wir dies im Auge behalten, bringen wir obige Gleichung in Bezug auf die Grössen $sn\,u = \eta$, $sn\,u_1 = \eta_1$ auf die rationale Form; für den Augenblick setzen wir noch $cn\,a = c$, $dn\,a = d$ $\left(c = p,\ \frac{c}{d} = q\right)$ und bekommen

$$26) \qquad \eta^2\eta_1{}^2 + \frac{2cd}{1-d^2}\,\eta\eta_1 - \frac{1}{1-d^2}(\eta^2 + \eta_1{}^2) + \frac{1-c^2}{1-d^2} = 0$$

wodurch die zwei-zweideutige symmetrische Verwandtschaft zweier Kreispunkte festgelegt ist.

25) geht über in 26), wenn ich setze

$$\sigma\varrho^2 = \frac{1}{1-d^2} \qquad \tau\varrho^2 = \frac{cd}{1-d^2}$$

$$\varrho^4 = \frac{1-c^2}{1-d^2} = \frac{1}{k^2}$$

Damit ist der vorgefasste Gedanke verwirklicht und es erübrigt nur noch, die Grössen c, d, ϱ durch die Grössen τ, σ auszudrücken. Das denke ich mir ausgeführt; dann zieht jede Relation $R(p, q) = 0$ zwischen den Grössen p und q eine Relation zwischen den Grössen τ und σ nach sich.

Wir bekommen nacheinander:

$$\frac{\tau}{\sigma} = cd \qquad \tau\sigma = \frac{cd}{(1-c^2)(1-d^2)}$$

$$(1-d^2)(1-c^2) = \frac{1}{\sigma^2}$$

$$d^2 + c^2 = \frac{\sigma^2 + \tau^2 - 1}{\sigma^2}$$

$$2cd = \frac{2\tau}{\sigma}$$

$$(c+d)^2 = \frac{(\sigma+\tau)^2 - 1}{\sigma^2} = \frac{4\gamma^2}{\alpha\beta}$$

$$(c-d)^2 = \frac{(\sigma-\tau)^2 - 1}{\sigma^2} = \frac{4(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}{\alpha\beta}$$

$$k^2 = \left(\frac{1 \mp \sqrt{\frac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}}}{1 \pm \sqrt{\frac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}}}\right)^2,$$

je nachdem $d \gtrless c$.

$k = 1$ oder $d = c$ folgt auf $\alpha = \gamma$ oder $\beta = \gamma$

$k = 0$ folgt auf $\alpha = \beta$.

V.

Sätze, welche metrische Eigenschaften betreffen.

24. In 6. wurde festgestellt, dass sich die Strecke FT (Fig. 2) durch den Ausdruck

$$\bar{A}t \quad dn\,u$$

darstellen lässt (wenn man dem Punkt F das Argument u zuweist), somit die Strecke $F_1 T$ durch

$$\bar{A}t\, dn\,(u+a)$$

Ihre Summe ist

$$\bar{A}t\,(dn\,u + dn\,(u+a));$$

ür die Seite $F_1 F_2$ folgt

$$\bar{A}t\,(dn\,(u+a) + dn\,(u+2a))$$

u s f.

Für ein geschlossenes (einfach gew.) n-Eck ist $a = \frac{2K}{n}$; sein Umfang lässt sich nach obigem durch die Summe

$$2\bar{A}t \sum_{0}^{n-1} \lambda \; dn\,(u + \lambda a)$$

zur Darstellung bringen.

Das vom Punkt F ausgehende n-Eck kann einfach oder mehrfach gewunden sein; bei vorgegebenem n gibt es $\frac{\varphi(n)}{2}$ diskreter Polygone. Wesentlich ist, dass sich die Darstellung ihrer Umfänge durch obige Summe nur in dem, dem Summenzeichen vorangesetzten Faktor $\bar{A}t$ unterscheidet (der selber von u nicht abhängt und dessen Bedeutung bekannt ist). Hieraus folgt offensichtlich, dass *das Verhältnis der Umfänge* der $\frac{\varphi(n)}{2}$ Polygone (und ebenfalls ihrer Inhalte)

$$U : U_1 : U_2 \ldots = At : At_1 : At_2 \ldots = const.$$

ein constantes ist und constant bleibt, wenn sich jene Schaar von Polygonen (in bekannter Weise) dreht.

25. Bei Weill, Journal de Math. Tome IV (3), wo das Schliessungsproblem für Kreise geometrisch behandelt ist, findet man u. a. den *Satz:*

«*Die Fläche eines (convexen) Polygons, welches zwei Kreisen um- und eingeschrieben und in Bewegung gedacht ist, bleibt proportional der Fläche desjenigen Polygons, welches die Berührungspunkte des ersteren mit dem innern der beiden Kreise zu Ecken hat.*»

In Fig. 8) sind das Kreisviereck $c\,T_{-1}\,F\,T_{+1}$ und das Dreieck $c\,T_{-1}\,T_{+1}$ entsprechende Flächenstücke der beiden Polygone. Der Winkel $T_{-1}\,c\,T_{+1}$ berechnet sich zu

$$\frac{2\varphi_{+1} + 2\varphi}{2} - \frac{2\varphi + 2\varphi_{-1}}{2} = \varphi_{+1} - \varphi_{-1}$$

(dabei bezeichnen φ_{+1}, φ, φ_{-1} nacheinander die Winkel $F_{+1}\,CA$, FCA, $F_{-1}\,CA$) und die Inhalte des Kreisvierecks und Dreiecks zu

$$r\,At\,dn\,u \text{ und } \tfrac{1}{2}\,r^2 \sin(\varphi_{+1} - \varphi_{-1})$$

Somit erhält man für die Flächeninhalte der Polygone die Ausdrücke

$$r\,\overline{At}\sum_{0}^{n-1}\lambda\;dn\,(u+\lambda a)=S(u)$$

und

$$\tfrac{1}{2}r^2\sum_{0}^{n-1}\nu\;\sin\left(\varphi_{\nu+1}-\varphi_{\nu-1}\right)=S^*(u)$$

Nun ziehen wir die Sehne $F_{-1}\,F_{+1}$; dreht sich das Polygonpaar, so umhüllt sie ebenfalls einen Kreis des Systems (k), nämlich denjenigen Kreis, dem das Argument $2a$ ent-

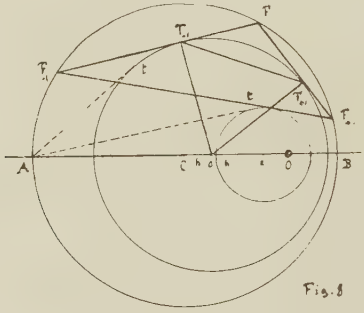


Fig. 1

spricht. Bezeichnen wir noch mit t' den Berührungspunkt der Tangente aus A an den neuen Kreis (c'), so kommt für die Strecke $F_{-1}\,F_{+1}$

$$F_{-1}\,\overline{F}_{+1}=At'\left(dn\,(u-a)+dn\,(u+a)\right).$$

Dieselbe Strecke wird aber auch dargestellt durch

$$2\cdot\sin\left(\varphi_{+1}-\varphi_{-1}\right).$$

Bildet man die Summe für das gesamte Polygon

$$\sum_{0}^{n-1}\nu\;\sin\left(\varphi_{\nu+1}-\varphi_{\nu-1}\right)=\overline{At'}\sum_{0}^{n-1}\lambda\;dn\,(u+\lambda a)$$

und macht von dieser Gleichsetzung Gebrauch, so folgt:

$$S(u)=\tfrac{1}{2}r\,\frac{At}{At'}\cdot S^*(u)$$

oder

$$\frac{S(u)}{S^*(u)} = const.$$

w. z. b. w.

26. Dann beweise ich noch den *Satz:*

«Es seien Ω, Ω^0 zwei Polygone, das erste variabel, das zweite fest, welche zwei Kreisen um- und eingeschrieben sind, so ist das Produkt der Entfernungen von einer Ecke von Ω^0 zu allen Ecken von Ω proportional dem Produkt der Entfernungen von einer andern Ecke von Ω^0 zu allen Ecken von Ω.»

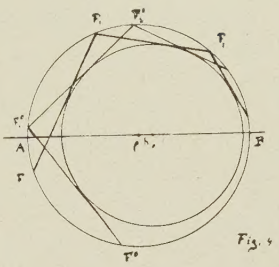


Fig. 4

u und u_0 seien die den Ecken F und F_0 der Polygone Ω und Ω^0 zugehörigen Argumente. Zur Abkürzung setze man

$$am\,(u + \lambda a) = \varphi_\lambda \qquad am\,(u_0 + \lambda a) = \varphi^0_\lambda \ ,$$

dann lassen sich die Strecken F^0F, F^0F_1, F^0F_2, . . . angeben durch

$$2\,sin\,(\varphi_\lambda - \varphi^0) \qquad \lambda = 0,\ 1,\ 2 \ldots n-1 \ ,$$

die Strecken $F_1{}^0F_1$, $F_1{}^0F_2$, . . . durch

$$2\,sin\,(\varphi_\lambda - \varphi_1{}^0) \qquad \lambda = 1,\ 2 \ldots n \ .$$

Allgemein die Strecken $F^0_\nu F_\nu$, $F^0_\nu F_{\nu+1}$, ... durch

$$2\,sin\,(\varphi_\lambda - \varphi^0_\nu) \qquad \lambda = \nu,\ \nu+1,\ \ldots\ n+\nu-1 \ .$$

Nun betrachten wir (unserem Satz gemäss) die Produkte

$$2^n\,\Pi\,sin\,(\varphi_\lambda - \varphi^0) = P(u) \qquad \lambda = 0,\ \ldots\ n-1$$

und

$$2^n\,\Pi\,sin\,(\varphi_\mu - \varphi^0_1) = P^*(u) \qquad \mu = 1,\ \ldots\ n$$

und ihren Quotienten

$$\frac{P(u)}{P^*(u)} = F(u) \ .$$

$F(u)$ ist eine elliptische Funktion.

Wird der Zähler null, so verschwindet der Nenner in derselben Ordnung und umgekehrt. Auch wird der Zähler und der Nenner zu gleicher Zeit und in derselben Ordnung unendlich; denn es treten oben wie unten dieselben Argumente in derselben Anzahl auf.

Eine solche elliptische Funktion ist aber eine *Constante* w. z. b. w.

Register.

Seite

I. Einleitung 5

II. Der Poncelet'sche Satz für Kreise . . . 9

III. Der allgemeine Poncelet'sche Satz . . . 17

IV. Relationen 22

V. Sätze, welche metrische Eigenschaften betreffen . 34

Curriculum vitae.

Geboren wurde ich, Arthur Stutz, den 11. August 1884 in Winterthur als Sohn des Alfred Stutz, Kaufmann, von Winterthur und der Bertha geb. Leumann. Nachdem ich in Winterthur die Primarschule absolviert und das dortige Gymnasium besucht hatte, kam ich mit dem 15. Altersjahr nach Basel, wo ich im Herbst 1909 die Maturität an der Obern Realschule bestand.

Hierauf bezog ich die Universität Basel und wandte mich von Anfang an der Mathematik zu. Ich besuchte die Vorlesungen der Herren Professoren Dr. H. Kinkelin, Dr. K. VonderMühll und Dr. O. Spiess; Experimentalphysik hörte ich bei Herrn Prof. Dr. Hagenbach-Bischoff, Astronomie bei Herrn Prof. Dr. A. Riggenbach.

Im Frühling 1907 bestand ich das Basler Mittelschullehrerexamen (mittlere Schulstufe) in den Fächern Mathematik, Physik und Geographie.

Hierauf hielt ich mich je ein Semester an den Universitäten Berlin und Paris auf und hörte die mathematischen Vorlesungen der Herren Professoren H. A. Schwarz, Hettner, Landau (Berlin), Appell, Goursat, Picard (Paris).

Dann liess ich mich im Herbst 1908 von neuem an der Universität Basel immatrikulieren und besuchte die Vorlesungen und Übungen des Herrn Prof. Dr. R. Fueter, unter dessen Leitung auch die vorliegende Dissertation entstanden ist.